

# Streszczenie

## Dynamika cienkich powłok walcowych o funkcyjnej gradacji własności - modelowanie tolerancyjne

Tematem rozprawy doktorskiej jest matematyczne modelowanie zagadnień dynamiki cienkich, liniowo-sprężystych, mikro-niejednorodnych powłok walcowych typu Kirchhoffa-Love'a. *W kierunku obwodowym, powłoki te w skali mikro mają tolerancyjnie periodyczną mikrostrukturę, natomiast w skali makro charakteryzują się funkcyjną poprzeczną gradacją własności uśrednionych (makrowłasności).* Oznacza to, że na poziomie mikro, rozpatrywane w rozprawie powłoki zbudowane są z dużej liczby elementów (komórek) idealnie ze sobą połączonych i regularnie rozmieszczonych w kierunku obwodowym. Zakłada się, że sąsiadujące ze sobą komórki są prawie identyczne, tzn. mają prawie identyczne własności geometryczne i materiałowe, natomiast komórki oddalone od siebie mogą znacznie się różnić. Zakłada się, że charakterystyczny wymiar liniowy komórki jest dostatecznie duży w porównaniu z maksymalną grubością powłoki oraz dostatecznie mały w porównaniu z minimalnym promieniem krzywizny oraz wymiarem liniowym powierzchni środkowej wzdłuż współrzędnej  $x \equiv x^1$  parametryzującej tę powierzchnię w kierunku obwodowym. *Na poziomie mikroskopowym, własności geometryczne, sprężyste oraz inercyjne takich powłok opisane są silnie oscylującymi, nieciągłymi, tolerancyjnie periodycznymi funkcjami podług argumentu  $x$ .* Natomiast, *na poziomie makroskopowym, uśrednione własności rozpatrywanych powłok są opisane funkcjami ciągłymi i wolnozmiennymi w kierunku tolerancyjnej periodyczności.* Ponadto, uśrednione własności zmieniają się w kierunku prostopadłym do granic między składnikami. Powłoki takie są nazywane powłokami *o funkcyjnej poprzecznej gradacji makrowłasności.*

W kierunku osiowym, własności rozpatrywanych powłok są stałe.

Opis dynamicznych zachowań mikro-niejednorodnych powłok będących przedmiotem rozprawy, w ramach znanej teorii Kirchhoffa-Love'a, prowadzi

do równań, których współczynniki są tolerancyjnie periodycznymi, silnie oscylującymi i nieciągłymi funkcjami w kierunku obwodowym. Stąd, równania te nie mogą być wprost zastosowane do analizy zagadnień inżynierskich. Formułowane są zatem różne przybliżone metody modelowania (tj. procedury uśredniające) prowadzące od równań różniczkowych cząstkowych z silnie oscylującymi współczynnikami do równań o współczynnikach ciągłych i wolnozmiennych (lub współczynnikach stałych w przypadku walcowych powłok periodycznych).

Modele uśrednione powłok (płyt) periodycznych/tolerancyjnie periodycznych są najczęściej otrzymywane na drodze *homogenizacji asymptotycznej*. Jednakże, modele te pomijają wpływ wielkości komórki na globalne (makroskopowe) zachowania powłoki, tzn. pomijają efekt skali.

Alternatywne, nieasymptotyczne podejście do matematycznego modelowania ciał periodycznych lub tolerancyjnie periodycznych, oparte na *pojęciu tolerancji* (pojęcie związane z dokładnością prowadzonych pomiarów lub obliczeń) i prowadzące do uśrednionych równań o stałych lub ciągłych i wolnozmiennych współczynnikach zależnych od wielkości komórki, zostało zaproponowane i rozwijane przez profesora Czesława Woźniaka w wielu publikacjach i podsumowane w monografiach [Woźniak Cz. *et al.* (eds.): *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Silesian University of Technology Press, Gliwice 2010], [Woźniak Cz., Michalak B., Jędrzyński J. (eds.): *Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach*. Lodz University of Technology Press, Lodz 2008], [Woźniak Cz., Wierzbicki E.: *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization*. Częstochowa University Press, Częstochowa 2000]. *Relacje tolerancyjne determinowane parametrami tolerancji, funkcje wolno-zmienne, funkcje tolerancyjno-periodyczne, fluktuacyjne funkcje kształtu oraz operacja uśredniania są podstawowymi pojęciami techniki tolerancyjnego modelowania*. Technika ta oparta jest na dwóch założeniach. Pierwsze z tych założeń, zwane *przybliżeniem (uśrednieniem) tolerancyjnym*, umożliwia pomijanie wyrazów rzędu parametrów tolerancji. Drugie założenie zwane jest *mikro-makro dekompozycją* pól przemieszczeń (lub pola temperatury w zagadnieniach przepływu ciepła). Ograniczając się do zagadnień mechanicznych, zgodnie z tym założeniem *nieznane przemieszczenia* w równaniach wyjściowych są przedstawione w postaci sumy *nieznanych uśrednionych na komórce przemieszczeń*, będących *funkcjami wolnozmiennymi* (tzn. przyjmującymi w ramach tolerancji stałe wartości na komórce), oraz *silnie oscylujących fluktuacji*. Fluktuacje są opisane przez

znane w każdym analizowanym zagadnieniu, liniowo-niezależne, periodyczne lub tolerancyjnie periodyczne fluktuacyjne funkcje kształtu pomnożone przez nieznanne wolnozmiennie funkcje, zwane amplitudami fluktuacji.

W niniejszej rozprawie wykorzystano *technikę tolerancyjnego modelowania* w zagadnieniach dynamiki walcowych powłok mikro-niejednorodnych o poprzecznej gradacji makrowłasności. Wykorzystano także nowe podejście do asymptotycznego uśredniania równań różniczkowych cząstkowych (lub funkcyjonałów całkowych) o silnie oscylujących periodycznych/tolerancyjnie periodycznych współczynnikach przedstawione w książce [Woźniak Cz. *et al.* (eds.): *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Silesian University of Technology Press, Gliwice 2010]. Podejście to nazwano asymptotycznym konsystentnym. Wykorzystano również, zaproponowaną w wyżej wymienionej monografii, połączoną asymptotyczno-tolerancyjną technikę modelowania ciał mikro-niejednorodnych. Stosując modelowanie tolerancyjne, asymptotyczne konsystentne oraz asymptotyczno-tolerancyjne do wyjściowych równań Eulera-Lagrange'a, których jawna postać pokrywa się ze znanymi równaniami teorii Kirchhoffa-Love'a cienkich powłok sprężystych, *wyprowadzono trzy nowe matematyczne uśrednione modele: tolerancyjny, asymptotyczny konsystentny oraz asymptotyczno-tolerancyjny*. W przeciwieństwie do silnie oscylujących i nieciągłych współczynników równań wyjściowych, współczynniki równań różniczkowych tych uśrednionych modeli są ciągłymi i wolnozmiennymi funkcjami podług współrzędnej  $x$  parametryzującej powierzchnię środkową powłoki w kierunku obwodowym. Ponadto, modele tolerancyjny i asymptotyczno-tolerancyjny uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury na dynamiczne zachowania powłoki. Wpływ ten zwany jest *efektem skali*.

Procedura tolerancyjnego modelowania zastosowana do wyjściowych równań Eulera-Lagrange'a realizowana była w dwóch etapach. Pierwszy etap polegał na *tolerancyjnym uśrednieniu funkcji Lagrange'a* z wykorzystaniem mikro-makro dekompozycji, operacji uśredniania oraz przybliżenia tolerancyjnego. W drugim etapie, stosując *zasadę stacjonarności działania do uśrednionego funkcyjonału działania* zdefiniowanego poprzez *tolerancyjny uśredniony lagrangian*, otrzymano uśrednione równania Eulera-Lagrange'a, których jawna postać reprezentowana jest przez relacje konstytutywne oraz równania ruchu. Sformułowane równania wraz z mikro-makro dekompozycją reprezentują model tolerancyjny do analizy zagadnień dynamiki cienkich powłok walcowych o tolerancyjnie periodycznej mikrostrukturze oraz o funkcyjnej poprzecznej gradacji makrowłasności w kierunku

obwodowym. Współczynniki równań modelu tolerancyjnego są ciągle i wolnozmiennie. Ponadto, niektóre z tych współczynników zależą od wielkości mikrostruktury. Efekt skali może być analizowany nie tylko w dynamicznych, ale także w stacjonarnych zagadnieniach. Niewiadome równań modelu, tzn. *makroprzemieszczenia oraz amplitudy fluktuacji, muszą być funkcjami wolnozmiennymi w kierunku tolerancyjnej periodyczności*. Te wymagania są wykorzystane do oceny *a posteriori* parametrów tolerancji, czyli także do sprawdzenia fizycznej poprawności wyników otrzymanych w ramach modelu tolerancyjnego.

Technika *asymptotycznego konsyistentnego uśredniania* równań różniczkowych cząstkowych (lub funkcjonałów całkowych) o silnie oscylujących periodycznych/tolerancyjnie periodycznych współczynnikach, przedstawiona w monografii [Woźniak Cz. *et al.* (eds.): *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Silesian University of Technology Press, Gliwice 2010], nie zawiera pojęć funkcji tolerancyjnie periodycznej i funkcji wolnozmiennej. Wprowadzono tu tylko pojęcie fluktuacyjnej funkcji kształtu. W zagadnieniach mechanicznych, podstawowym kinematycznym założeniem tego podejścia jest *asymptotyczna dekompozycja pól przemieszczeń*. Zgodnie z tym założeniem, przemieszczenia występujące w wyjściowych równaniach (lub w wyjściowym funkcyjale całkowym) zastąpione są rodzinami pól przemieszczeń zdefiniowanymi na komórce i zależnymi od parametru  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Rodziny te rozłożone są na *nieznane przemieszczenia*, (zwane tak jak w podejściu tolerancyjnym *makroprzemieszczeniami*), *niezależne od parametru  $\varepsilon$  oraz silnie oscylujące fluktuacje przemieszczeń zależne od  $\varepsilon$* . Te silnie oscylujące fluktuacje są reprezentowane przez *znane periodyczne/tolerancyjnie periodyczne fluktuacyjne funkcje kształtu zależne od  $\varepsilon$*  oraz przez *nieznane funkcje niezależne od  $\varepsilon$* , które, tak jak w podejściu tolerancyjnym, zwane są *amplitudami fluktuacji*. Żąda się, aby występujące w asymptotycznej dekompozycji funkcje niezależne od  $\varepsilon$  były ciągle i ograniczone w kierunkach periodyki lub tolerancyjnej periodyczności wraz z ich odpowiednimi pochodnymi. Niezależność wyżej wymienionych funkcji od parametru  $\varepsilon$  stanowi zasadniczą różnicę między podejściem asymptotycznym konsyistentnym a podejściem stosowanym w znanych teoriach homogenizacji asymptotycznej. Ponadto, modele asymptotyczne konsyistentne, w przeciwieństwie do powszechnie stosowanych modeli asymptotycznych, nie wymagają rozwiązywania skomplikowanych analitycznie brzegowych zagadnień na komórce w celu wyznaczenia efektywnych sztywności ciała. W podejściu asymptotycznym konsyistentnym, moduły efektywne są rozwiązaniem układu równań algebraicznych liniowych dla nieznanymi

*amplitud fluktuacji.*

Procedura modelowania asymptotycznego konsystentnego zastosowana do wyjściowych równań Eulera-Lagrange'a realizowana była w dwóch etapach. Pierwszy etap polegał na *asymptotycznym konsystentnym uśrednieniu wyjściowej funkcji Lagrange'a* z wykorzystaniem asymptotycznej dekompozycji. W drugim etapie, stosując *zasadę stacjonarności działania do uśrednionego funkcyjonału działania* zdefiniowanego poprzez *asymptotycznie uśredniony lagrangian*, otrzymano uśrednione równania Eulera-Lagrange'a oraz ich jawną postać. Po wyeliminowaniu z układu równań amplitud fluktuacji, otrzymano równania modelu asymptotycznego wyrażone tylko w makroprzemieszczeniach. Równania te wraz z dekompozycją oraz równaniami dla amplitud fluktuacji reprezentują model asymptotyczny konsystentny do analizy zagadnień dynamiki rozważanych w rozprawie cienkich powłok walcowych o tolerancyjnie periodycznej mikrostrukturze oraz o funkcyjnej poprzecznej gradacji makrowłasności w kierunku obwodowym. Współczynniki równań modelu asymptotycznego są ciągłe i wolno zmieniające się. *Współczynniki te nie zależą od parametru długości mikrostruktury.*

Stosując procedurę asymptotyczno-tolerancyjną, por. książka [Woźniak Cz. et al. (eds.): *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Silesian University of Technology Press, Gliwice 2010], wyprowadzono model asymptotyczno-tolerancyjny do badania zagadnień dynamiki walcowych powłok o tolerancyjnie periodycznej mikrostrukturze i poprzecznej gradacji makrowłasności w kierunku obwodowym. Równania tego modelu reprezentowane są przez równania modelu asymptotycznego (makroskopowego), sformułowane z zastosowaniem techniki modelowania asymptotycznego konsystentnego i mające ciągłe, wolno zmieniające się współczynniki *niezależne od wielkości mikrostruktury* oraz równania modelu tolerancyjnego (mikroskopowego), wyprowadzone z zastosowaniem techniki tolerancyjnego modelowania i mające ciągłe, wolnozmiennie współczynniki *zależne od wielkości komórki*. Obydwa modele połączone są ze sobą na podstawie założenia, że rozwiązania danego zagadnienia brzegowo-początkowego w ramach modelu asymptotycznego są znane. W rozprawie pokazano, że przy pewnych warunkach nałożonych na fluktuacyjne funkcje kształtu, otrzymuje się równania niezależne od rozwiązań w ramach modelu asymptotycznego. *Równania te opisują mikrodynamiczne zachowania rozważanych w rozprawie powłok niezależnie od ich makrodynamicznych zachowań.* Jest to główna zaleta wyprowadzonego modelu asymptotyczno-tolerancyjnego.

Sformułowane modele tolerancyjny i asymptotyczny zastosowano do

*oceny efektu skali* w pewnych szczególnych zagadnieniach dotyczących drgań własnych rozważanych powłok. Ponieważ znalezienie analitycznych rozwiązań równań modelu tolerancyjnego lub modelu asymptotycznego w ogólnym przypadku nie jest możliwe, zastosowano przybliżony sposób rozwiązania. Przybliżone wzory częstości drgań własnych otrzymano korzystając z metody Ritza. *Analizując dynamikę powłok w ramach modelu tolerancyjnego, otrzymano wzory analityczne nie tylko na podstawowe tzw. niższe częstości drgań własnych, ale również na nowe, dodatkowe tzw. wyższe częstości drgań własnych zależne od parametru długości mikrostruktury. Wyższe częstości umożliwiają analizę drgań wyższego rzędu oraz zjawiska dyspersji. Te nowe wyższe częstości drgań nie mają swoich odpowiedników w modelach asymptotycznych oraz w modelach numerycznych, opartych na przykład na metodzie elementów skończonych.* Wykazano, że wartości niższych częstości drgań własnych obliczane według modelu tolerancyjnego są pomijalnie większe od wartości odpowiednich częstości drgań otrzymanych w ramach modelu asymptotycznego. Uwzględnienie efektu skali powoduje więc jedynie nieznaczną, nie mającą praktycznego znaczenia korektę wartości częstości drgań. Oznacza to, że *efekt skali w zagadnieniach dotyczących drgań własnych rozważanych powłok jest pomijalnie mały z obliczeniowego punktu widzenia.* Zagadnienia te mogą być analizowane w ramach modeli asymptotycznych (prostszych analitycznie od modeli z efektem skali).

Wyprowadzone z zastosowaniem procedury asymptotyczno-tolerancyjnej równania niezależne od rozwiązań w ramach modelu asymptotycznego, wykorzystano do analizy zagadnień mikrodynamiki rozważanych tolerancyjnie periodycznych powłok.

Analizowano mikrodrżania niezależnie od makrodrgań. Wyprowadzono wzory na *wyższe, dodatkowe, zależne od wielkości mikrostruktury częstości mikrodrgań własnych w kierunkach obwodowym, osiowym oraz normalnym do powierzchni środkowej.* Wzory te otrzymano korzystając z przybliżonej metody Galerkina. *Przeprowadzono dokładną analizę tych częstości.*

*Analizując harmoniczne mikrodrżania w kierunku osiowym z częstością  $\tilde{\omega}$  (rozprzężone z mikrodrżaniami w kierunkach obwodowym i normalnym), uzyskano nowe wyniki w teorii mikrodrgań powłok o funkcyjnej gradacji własności.* Pokazano, że w zależności od relacji między częstością drgań harmonicznych  $\tilde{\omega}$  a wyższą częstością mikrodrgań własnych  $\tilde{\omega}_*$ , zależną od wielkości komórki, występują różne postaci mikrodrgań. *Mikrodrżania zanikają wykładniczo lub liniowo. Dla pewnych relacji między wartościami  $\tilde{\omega}$  i  $\tilde{\omega}_*$  mamy do*

czynienia z niezanikającą (tj. oscylującą) postacią mikrodrgań lub z mikrodrganiami rezonansowymi. Zbadano także tzw. efekt warstwy brzegowej, gdzie termin „brzeg” odnosił się do przestrzeni.

Nowe wyniki uzyskano badając zagadnienia propagacji fal długich w nieograniczonych w kierunku osiowym powłokach tolerancyjnie periodycznych. Badane fale odnosiły się tylko do fluktuacyjnych części przemieszczeń zależnych od efektu skali. Pokazano, że w zależności od ograniczeń nałożonych na prędkość propagacji fal mogą propagować się trzy typy fal: sinusoidalna lub wykładnicza lub występuje zdegenerowany przypadek rozgraniczający fale sinusoidalne i wykładnicze. Wyprowadzono relacje dyspersji. Wyprowadzono i zbadano nową prędkość propagacji fal zależną od parametru długości mikrostruktury.

Nowe wyniki uzyskano analizując szczególny problem początkowy opisany równaniem dla amplitud mikro-fluktuacji w kierunku osiowym. W badanym zagadnieniu równanie to redukuje się do równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu z pochodnymi względem czasu. Problem ten ilustruje wpływ wielkości komórki na charakter mikro-fluktuacji przemieszczeń w kierunku osiowym, przy przyjętych warunkach początkowych. Pokazano, że w zależności od relacji między pewnym parametrem długości  $l$  niezależnym od wielkości komórki a parametrem długości mikrostruktury  $\lambda$ , mikro-fluktuacje przemieszczeń w kierunku osiowym mają różny charakter w badanym przedziale czasu: dla  $l < \lambda$  maleją monotonicznie i bardzo łagodnie i nie przyjmują wartości zero w badanym przedziale czasu, dla  $l = \lambda$  mikro-fluktuacje maleją monotonicznie i na końcu badanego przedziału czasu są równe zero, dla  $l > \lambda$  mikro-fluktuacje zanikają monotonicznie i silnie w pewnym podprzedziale badanego przedziału czasu, a następnie absolutne wartości mikro-fluktuacji rosną monotonicznie w pozostałej części tego przedziału czasu.

Wszystkie przedstawione powyżej efekty, uzyskane w ramach równań mikromechaniki modelu asymptotyczno-tolerancyjnego nie mogą być analizowane w ramach asymptotycznych modeli powłok, jak również przy użyciu znanych programów komputerowych.

Wyprowadzone w niniejszej rozprawie modele mikro-niejednorodnych powłok walcowych mogą być wykorzystane do badań dynamiki powłokowych elementów konstrukcyjnych mostów i dachów, powłokowych elementów reaktorów, powłokowych elementów samolotów, okrętów, maszyn.

Uzyskane wyniki mają istotny wpływ na stan wiedzy dotyczącej dynamicznych zachowań cienkościennych powłok walcowych o tolerancyjnie periodycznej mikrostrukturze oraz o funkcyjnej

*poprzecznej gradacji własności uśrednionych (makrowłasności) w kierunku obwodowym*, a także generują nowe kierunki badań i tym samym wywierają wpływ na rozwój tej dziedziny wiedzy.

Dalsze badania mikro-niejednorodnych powłok walcowych, będących obiektem rozważań rozprawy doktorskiej, z wykorzystaniem techniki tolerancyjnego modelowania mogą dotyczyć nieliniowych zagadnień dynamiki i stateczności, problemów dynamicznej termosprężystości, formułowania modeli w ramach teorii dokładniejszych niż teoria Kirchhoffa-Love'a.